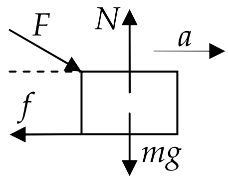
功能原理 能量守恒定律



（第 1 题图）

1. 对物体受力分析，如图所示，可得

$$\begin{cases} N = mg + F\sin 30^\circ \\ F\cos 30^\circ - f = ma \\ f = \mu N \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f = \mu mg + \mu F\sin 30^\circ \\ F\cos 30^\circ - f = ma \end{cases} \Rightarrow ma = \frac{\sqrt{3}-\mu}{2}F - \mu mg,$$

$\Rightarrow a = \dfrac{5\sqrt{3}-1}{2}t - 2$，又由于加速度 $a \ge 0$ 时，物体才会开始运动，所以物体从 $t_1 = \dfrac{2}{5\sqrt{3}-1}$ 时刻开始运动。

由 $a = \dfrac{dv}{dt} \quad \Rightarrow \int_0^v dv = \int_{t_1}^3 (\dfrac{5\sqrt{3}-1}{2}t - 2)dt \quad \Rightarrow \quad t = 3\text{s}$ 时物体的速度大小：$v = 28.7\,\text{m/s}$.

2. 若**取弹簧处于原长时弹性势能为零**，则当弹簧形变量为 x 时，弹性势能：$E_p = \dfrac{1}{2}kx^2$.

弹簧处在 A 和 B 之间时，形变量 $x_1 = 2l - l = l$，弹性势能：$E_{pB} = \dfrac{1}{2}kx_1^2 = \dfrac{1}{2}k\,l^2$；

弹簧处在 A 和 C 之间时，形变量 $x_2 = \sqrt{2}\,l - l = (\sqrt{2}-1)l$，弹性势能：$E_{pC} = \dfrac{1}{2}kx_2^2 = \dfrac{1}{2}k(\sqrt{2}-1)^2 l^2$；

则从 **B** 到 **C** 的过程中弹性力做功：$W_{BC} = E_{pB} - E_{pC} = \dfrac{1}{2}k\,l^2 - \dfrac{1}{2}k(\sqrt{2}-1)^2 l^2 = (\sqrt{2}-1)\,k\,l^2$.

3. 建立竖直向下的 ox 轴，弹簧原长处为坐标原点 o，并且取原点 o 处**物体** m_1、**弹簧和地球构成的系统**弹性势能和重力势能均为零。（原点 o 处为零势能点）

开始时，设弹簧拉伸为 x_0，物体处于静止， 得 $(m_1 + m_2)g = kx_0$，$\Rightarrow$ 系统的机械能：$E_0 = \dfrac{1}{2}kx_0^2 - m_1 g x_0$；

设物体 m_1 运动到 x 处的速度为 v， $\Rightarrow$ 系统的机械能：$E = \dfrac{1}{2}m_1 v^2 + \dfrac{1}{2}kx^2 - m_1 g x$；

整个运动过程中系统机械能守恒，$E_0 = E \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{2}kx_0^2 - m_1 g x_0 = \dfrac{1}{2}m_1 v^2 + \dfrac{1}{2}kx^2 - m_1 g x$，

$\Rightarrow \dfrac{1}{2}m_1 v^2 = -\dfrac{1}{2}kx^2 + m_1 g x + \dfrac{1}{2}kx_0^2 - m_1 g x_0 \Rightarrow$ 当 $x = \dfrac{m_1 g}{k}$ 时，$\dfrac{1}{2}m_1 v_m^2 = \dfrac{m_2^2 g^2}{2k}$ 取最大值，

$\Rightarrow$ **物体 m_1 的最大速度为**：$v_m = m_2 g\sqrt{\dfrac{1}{m_1 k}} \approx 0.014\,\text{m/s}$.

4. 子弹 m 击中左物块 M 并以共同速度运动过程中，弹簧仍为原长，即弹簧对左、右物块没有作用力，则在此过程中子弹和左物块构成的系统在光滑水平面上水平方向合外力为零，水平方向动量守恒。设子弹和左物块共同运动速度大小为 v_1，有 $mv_0 = (m+M)v_1 \quad \Rightarrow \quad v_1 = \dfrac{mv_0}{m+M}$；

（1）此时子弹的速度大小为 $\dfrac{mv_0}{m+M}$，方向水平向右。

（2）在子弹和左物块碰撞过程中，弹簧处于原长，则弹簧对右物块的作用力为零。右物块所受合外力为零，它的状态不会变化，此时仍保持静止。

（3）随后，子弹和左物块将以共同运动速度 v_1 推动弹簧发生形变，带动右物块运动起来；子弹和左物块的速度减小，右物块的速度增大，当子弹和左物块以及右物块达到共同速度时，弹簧压缩长度最大。在此过程中子弹和左、右物块以及弹簧构成的系统在水平方向上合外力为零，水平方向动量守恒。

设子弹和左物块以及右物块共同运动速度大小为 v_2，此时弹簧最大压缩长度为 x_m，有

$$mv_0=(m+M)v_1=(m+2M)v_2 \quad \Rightarrow \quad v_2=\frac{mv_0}{m+2M},$$

分析：子弹和左物块碰撞达到共同运动速度 v_1 的过程是非弹性碰撞，子弹和左物块构成的系统能量有损失，系统动能将变小。但子弹和左物块以共同运动速度 v_1 带动右物块一起运动的这段过程，子弹和左、右物块以及弹簧构成的系统只有弹簧的弹性力（保守内力）做功，系统机械能守恒。

子弹和左物块以共同速度 v_1 运动，弹簧处于原长，右物块静止时，系统机械能：$E_1=\frac{1}{2}(m+M)v_1^2$；

子弹和左、右物块以共同速度 v_2 运动，弹簧压缩长度为 x_m 时，系统机械能：$E_2=\frac{1}{2}(m+2M)v_2^2+\frac{1}{2}kx_m^2$；

（注意：计算中已取弹簧原长时，弹性势能为零！）

机械能守恒：$E_1=E_2 \ \Rightarrow \ \frac{1}{2}(m+M)v_1^2=\frac{1}{2}(m+2M)v_2^2+\frac{1}{2}kx_m^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}kx_m^2=\frac{Mm^2v_0^2}{2(m+M)(m+2M)}$

$\Rightarrow$ **最大压缩长度：**$x_m=\sqrt{\frac{Mm^2v_0^2}{k(m+M)(m+2M)}}$.

5. 设细绳单位长度的质量（质量线密度）为 λ，取距绳的下端为 x、长为 dx 的一小段为研究对象。

dx 落地之前瞬间的速度大小为：$v=\frac{dx}{dt}=\sqrt{2gx}$，（可以由动能定理：$(\lambda dx)gx=\frac{1}{2}(\lambda dx)v^2$ 求得）

在落地过程中 dx 受到桌面的冲量为：$Fdt=0-(\lambda dx)v \ \Rightarrow \ F=-\lambda\frac{dx}{dt}v=-2\lambda gx$，（负号表示方向）

$\Rightarrow$ 由作用力与反作用力，dx 对桌面的作用力为 $F'=2\lambda gx$，

所以此时**绳对桌面的压力（总作用力）**：$N=\lambda xg+2\lambda gx=3\lambda xg$，**为已落到桌面上的绳所受重力的三倍。**

6.（1）小球 m 和木槽 M 构成的系统在水平方向上动量守恒：$mv-Mu=0$，

又下滑过程中小球重力做功等于系统动能的增加：$mgR=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}Mu^2$，

解得小球刚离开木槽时，**小球速度大小为**：$v=\sqrt{\frac{2MgR}{m+M}}$，**木槽速度大小为**：$u=\sqrt{\frac{2m^2gR}{M(m+M)}}$；

（2）由相对运动，小球相对木槽在 B 点处的速度大小为 $v+u$；

在木槽参照系下小球做半径为 R 圆周运动，在 B 点处小球受到支持力 N 和重力 mg 的合力提供向心力：

$$N-mg=m\frac{(v+u)^2}{R} \quad \Rightarrow \quad N=mg+2mg\frac{m+M}{M}=\frac{2m+3M}{M}mg,$$

由作用力与反作用力，**小球在 B 点处对木槽的压力**：$N'=\frac{2m+3M}{M}mg$.

